

DRGANIA MECHANICZNE

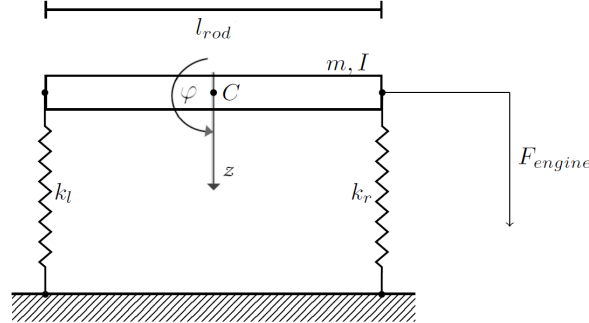
NIETŁUMIONE UKŁADY O WIELU STOPNIACH SWOBODY

Undamped Symmetrical Vehicle Suspension Report z 2 St.S. dla $l_l = l_r$, $k_l = k_r$

3 lutego 2024

Schemat systemu

Ilustracja przedstawia schemat rzeczywistego obiektu mechanicznego, wyznaczony na podstawie uprzedniej analizy rzeczywistego obiektu.



Analizując przedstawiony układ można stwierdzić, że jego liczba stopni swobody to 2.

Tabela z wartościami parametrów do obliczeń

Przyjęte do obliczeń wartości poszczególnych parametrów przedstawia tabela 1

Tabela 1: Podstawowe wartości parametrów

Parametr	Wartość
l_l	l_r
k_l	k_r

Energia kinetyczna

Energia kinetyczna układu wyrażona jest wzorem:

$$T = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m\dot{z}^2}{2} \quad (1)$$

Wyznaczona wielkość określa energię układu wynikającą z jego własności inercyjnych (energię zmagazynowaną w elementach bezwładnych).

Energia potencjalna

Energia potencjalna układu wyrażona jest wzorem:

$$V = \frac{k_r(l_r\varphi - z)^2}{2} + \frac{k_l(-l_r\varphi - z)^2}{2} \quad (2)$$

Zaprezentowana zależność opisuje oddziaływanie potencjalnych pól sił w których znajduje się obiekt.

Dyssypacyjna funkcja Rayleigh'a

Energia rozpraszana tłumieniem wyrażona jest wzorem:

$$D = 0 \quad (3)$$

Podana zależność stanowi potencjał dysypacyjny Rayleigh'a, który poddany różniczkowaniu względem wektora prędkości uogólnionych pozwala na określenie sił wiskotycznego tłumienia.

Lagrangian układu (Funkcja Lagrange'a)

Lagrangian układu dany jest następującym wyrażeniem (4):

$$L = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m\dot{z}^2}{2} - k_r z^2 - k_r l_r^2 \varphi^2 \quad (4)$$

Równania Eulera Lagrange'a dla rozważanego przypadku są następujące:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = Q_z^N \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = Q_\varphi^N \quad (6)$$

Kolejne pochodne wynikające z zastosowania równań Eulera-Lagrange'a są następujące:

$$\frac{\partial L}{\partial z} = -2k_r z \quad (7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -2k_r l_r^2 \varphi \quad (8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \quad (9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I\dot{\varphi} \quad (10)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\ddot{z} \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I\ddot{\varphi} \quad (12)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{z}} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}} = 0 \quad (14)$$

Wyniki przedstawionych operacji wykorzystuje się wyznaczenia równań ruchu układu.

Równanie ruchu

Wykorzystując obliczone pochodne, wyznacza się równania ruchu na podstawie odpowiedniego wzoru. Równania ruchu układu przedstawiają zależności: (15)- (16)

$$F_{engine} + m\ddot{z} - F_{engine} \cos(\Omega t) + 2k_r z = 0 \quad (15)$$

$$F_{engine} l_r + I\ddot{\varphi} + F_{engine} l_r \cos(\Omega t) + 2k_r l_r^2 \varphi = 0 \quad (16)$$

Wyznaczone równania stanowią matematyczny opis dynamiczny właściwości układu. Dalsza analiza pozwala na skuteczną analizę działania modelowanego obiektu i określenie jego parametrów mechanicznych.

Wyznaczanie macierzy fundamentalnej

Z równań ruchu wyznaczono macierz mas i sztywności układu::

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$K = \begin{bmatrix} 2k_r & 0 \\ 0 & 2k_r l_r^2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Macierz fundamentalna, na podstawie której wyznaczono równanie charakterystyczne rozważanego układu Δ , przedstawiają się następująco::

$$A = \begin{bmatrix} 2k_r - m\omega^2 & 0 \\ 0 & -I\omega^2 + 2k_r l_r^2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\Delta = 4k_r^2 l_r^2 + Im\omega^4 - 2Ik_r\omega^2 - 2k_r l_r^2 m\omega^2 \quad (20)$$

Macierz fundamentalna pozwala określić rozwiązanie ustalone. Natomiast bazując na równaniu charakterystycznym określa się częstości własne układu.

Rozwiązanie ogólne

Rozwiązanie ogólne przedstawia wyrażenie:

$$X_{g-z(t)} = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{k_r}t}{\sqrt{m}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{k_r}t}{\sqrt{m}}\right) \quad (21)$$

$$X_{g-\varphi(t)} = C_3 \cos\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{k_r}l_r t}{\sqrt{I}}\right) + C_4 \sin\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{k_r}l_r t}{\sqrt{I}}\right) \quad (22)$$

Rozwiązanie ogólne opisuje ruch analizowanego układu (przedstawia przemieszczenie w funkcji czasu) i wynika z rozważań dotyczących drgań swobodnych układu.

Rozwiązanie szczególne

Rozwiązanie szczególne dane jest następującym wyrażeniem:

$$X_{s-z(t)} = \frac{0.5F_{engine}}{k_r} + \frac{F_{engine} \cos(\Omega t)}{m(-\Omega^2 + \frac{2.0k_r}{m})} \quad (23)$$

$$X_{s-\varphi(t)} = -\frac{0.5F_{engine}}{k_r l_r} - \frac{F_{engine} l_r \cos(\Omega t)}{I(-\Omega^2 + \frac{2.0k_r l_r^2}{I})} \quad (24)$$

Rozwiązanie szczególne układu przedstawia zależność położenia od czas odpowiednią dla drgań wymuszonych